

ゼロから学ぶ PID 制御（デジタルコース）

第5回 デジタル PID 制御：差分法によるデジタル化

1. 差分法によるデジタル変換

連続（アナログ）系からデジタル系に変換する方法の第2弾として、微分方程式から差分近似をして変換する方法を紹介する。(5.1) 式に示す時間領域で表現されたアナログ PID 制御基本式を差分法を用いてデジタル PID アルゴリズムに変換する例について説明する。

$$MV = K_P \left(e + \frac{1}{T_I} \int e \, dt + T_D \frac{de}{dt} \right) \quad \dots(5.1)$$

MV：PID 制御出力、e：偏差（目標値－実際値）

K_P ：比例ゲイン、 T_I ：積分時間、 T_D ：微分時間

(5.1) 式において、積分は (5.2) 式のように、また微分は (5.3) 式のように近似する。

$$\int e \, dt \doteq \Delta t \times \sum_{i=1}^n e_i \quad \dots(5.2)$$

$$\frac{de}{dt} \doteq \frac{\Delta e_n}{\Delta t} = \frac{(e_n - e_{n-1})}{\Delta t} \quad \dots(5.3)$$

ここで (5.2) 式および (5.3) 式を (5.1) 式に代入して整理すると (5.4) 式を得る。

$$MV_n = K_P \left\{ e_n + \frac{\Delta t}{T_I} \sum_{i=1}^n e_i + \frac{T_D}{\Delta t} (e_n - e_{n-1}) \right\} \quad \dots(5.4)$$

この (5.4) 式は、いわゆる「理想 PID 制御の位置形デジタル演算式」である。

2. 速度形デジタル演算式

速度形演算式を求めるためには操作信号 MV_n を「今回値 MV_n = 前回値 MV_{n-1} + 変化分 ΔMV_n 」という形にしなければならない。そこで、(5.4) 式から前回値 MV_{n-1} を求めると (5.5) 式となる。

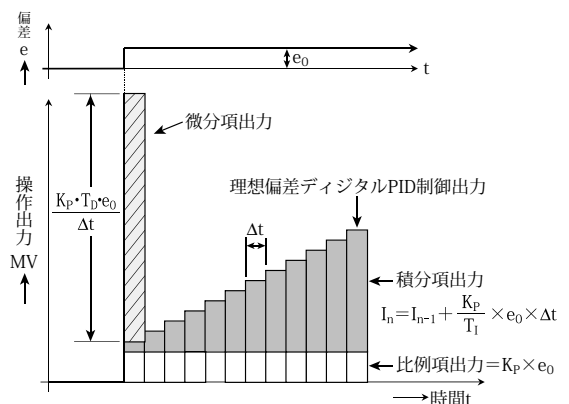
$$MV_{n-1} = K_P \left\{ e_{n-1} + \frac{\Delta t}{T_I} \sum_{i=1}^{n-1} e_i + \frac{T_D}{\Delta t} (e_{n-1} - e_{n-2}) \right\} \quad \dots(5.5)$$

変化分 ΔMV_n は (5.4) 式から (5.5) 式を差し引いて得られ、(5.6) 式となる。

$$\begin{aligned} \Delta MV_n &= MV_n - MV_{n-1} \\ &= K_P \left\{ (e_n - e_{n-1}) + \frac{\Delta t}{T_I} e_n + \frac{T_D}{\Delta t} (e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}) \right\} \quad \dots(5.6) \end{aligned}$$

$$MV_n = MV_{n-1} + \Delta MV_n \quad \dots(5.7)$$

この (5.6) 式と (5.7) 式の組合せが理想偏差 PID 制御の速度形デジタル演算式である。第 5.1 図にステップ偏差が発生した場合の理想偏差デジタル PID 制御出力の波形を示す。



第 5.1 図 ステップ偏差に対する理想偏差デジタル PID 制御出力

3. 不完全微分のデジタル演算式

不完全微分をラプラス演算子 s を用いた (5.8) 式で表現されたアナログ演算式を出発点として、デジタル演算式に変換する過程を手順を追って説明する。

$$E(s) \xrightarrow{\text{偏差}} \left[\frac{T_D \cdot s}{1 + \eta T_D \cdot s} \right] \xrightarrow{\text{出力}} Y(s) \quad \dots(5.8)$$

【手順 1】 まず不完全微分をラプラス演算子 s を用いて、(5.9) 式に示す伝達関数の形で表す。

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{T_D \cdot s}{1 + \eta T_D \cdot s} \quad \dots(5.9)$$

【手順 2】 次にラプラス方程式を微分方程式に書き換える。

(5.9) 式の分母をはらって変形して、(5.10) 式とする。

$$Y(s) + \eta T_D \cdot s \cdot Y(s) = T_D \cdot s \cdot E(s) \quad \dots(5.10)$$

次に (5.11) 式を微分方程式に変換すると、(5.11) となる。

$$y + \eta T_D \frac{dy}{dt} = T_D \frac{de}{dt} \quad \dots(5.11)$$

【手順 3】 近似して差分を用いた式に変換する。

(5.12) 式のように近似して、これを (5.11) 式に代入し整理して (5.13) 式を得る。

$$\frac{dy}{dt} \doteq \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t}, \quad \frac{de}{dt} \doteq \frac{e_n - e_{n-1}}{\Delta t} \quad \dots(5.12)$$

$$y_n = \frac{\eta T_D}{\Delta t + \eta T_D} y_{n-1} + \frac{T_D}{\Delta t + \eta T_D} (e_n - e_{n-1}) \quad \dots(5.13)$$

この (5.13) 式は制御周期ごとに出力の大きさを直接計算するもので、不完全微分の位置形デジタル演算式である。

【手順 4】 さらに (5.13) 式に代数操作をして速度形デジタル演算式に変換し、(5.14) 式を得る。

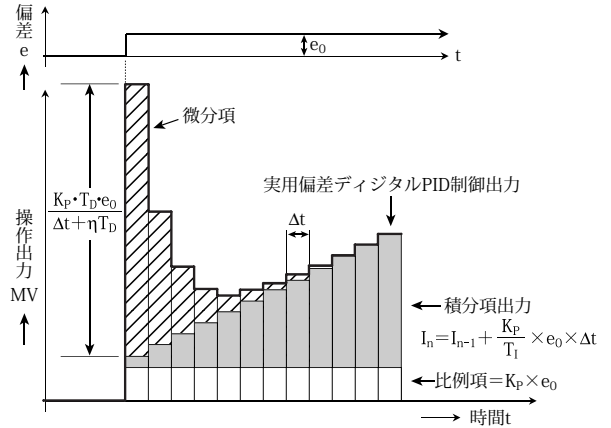
$$y_n = y_{n-1} + \left\{ \frac{\eta T_D}{\Delta t + \eta T_D} \Delta y_{n-1} + \frac{T_D}{\Delta t + \eta T_D} (e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}) \right\} \quad \dots(5.14)$$

4. 実用偏差デジタル PID

以上の結果をまとめて、不完全微分を用いた実用偏差 PID 制御の速度形デジタル演算式は (5.15) 式になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{MV_n}{(\text{今回値})(\text{前回値})} &= \frac{MV_{n-1}}{(\text{今回値})(\text{前回値})} + K_P \{ (e_n - e_{n-1}) + \frac{\Delta t}{T_I} e_n + \Delta d_n \} \\ \Delta d_n &= \left\{ \frac{\eta T_D}{\Delta t + \eta T_D} \Delta d_{n-1} + \frac{T_D}{\Delta t + \eta T_D} (e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots(5.15)$$

第 5.2 図にステップ偏差が発生した場合の実用偏差デジタル PID 制御出力の波形を示す。第 5.1 図の理想偏差デジタル PID 制御出力の波形と比べると、P 動作出力と I 動作出力は同じであるが、D 動作出力が時間



第 5.2 図 ステップ偏差に対する実用偏差デジタル PID 制御出力

的広がりを持っており、微分面積が大きくなって操作端にエネルギーを与えることができ、微分が有効に働くようになっていくことがわかる。

5. 実用測定値微分先行形デジタル PID

測定値微分先行形は目標値 SV 変化に対して、微分動作が効かないようにして、目標値 SV 変化に伴うキックをなくし、プロセスに与えるショックを抑制したものである。これに対応するためには、微分演算部分のみに対して $SV_n = SV_{n-1} = SV_{n-2}$ として、他の部分は実用偏差 PID の (5.15) 式と同じ演算をすればよい。具体的には、(5.15) 式の微分演算の中の $(e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2})$ の部分のみを $(2PV_{n-1} - PV_n - PV_{n-2})$ に置き換えればよい。

6. 実用測定値比例微分先行形デジタル PID

これは前項の測定値微分先行形 PID に対して、さらに目標値 SV 変化に伴う比例キックをなくしたものである。これに対応するためには、前期 5 項の処理にさらに比例演算に対しても $SV_n = SV_{n-1}$ として、(5.15) 式の比例演算の中の $(e_n - e_{n-1})$ 部分を $(PV_{n-1} - PV_n)$ に置き換えることを追加すればよい。

<参考文献>

- 1) 広井：「プロセス制御を解剖する：第 25 回 デジタル PID：差分法によるデジタル変換」、『計装』Vol.43, No.8 (2000.7)
- 2) 広井, 宮田：『シミュレーションで学ぶ自動制御技術入門』, CQ 出版 (株) 2004.10)